http://www.scm.org.co/Articulos/733.pdf

Lecturas Matemáticas
Volumen **24** *(2003), páginas 99–121*

El método socrático y el modelo de van Hiele

Andrés de la Torre Gómez
Universidad de Antioquia, Medellín

Al profesor y académico Don Jairo Charris Castañeda
In memoriam

Abstract. Plato's Dialogues, particularly in Meno. The constructivist approach to learning is considered in its relations both to empiricism and rationalism, the last one being sustained in ancient Greece mainly by Socrates and Plato. The importance of Socratism in modern times is considered as well as the manner in which it has been incorporated -in the twentieth century- in the van Hiele's theory of mathematics education.

Key words and phrases. Socratic interview, constructivism, van Hiele´s model, levels of thought, phases of learning.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary: 00A35. Secondary: 97C50, 97D20.

Resumen. Se describe el método socrático como camino hacia el esclarecimiento de los conceptos, tal como se perfila en los *Diálogos* de Platón y, particularmente, en el *Menón*. Se sitúa la concepción constructivista del aprendizaje en relación con el empirismo y el racionalismo, doctrina ésta cuyos adalides en Grecia fueron Sócrates y Platón. Se analiza la pertinencia contemporánea del socratismo y la forma como ha sido incorporado a uno de los modelos educativos matemáticos del siglo XX, a saber, el de van Hiele.

1. El método socrático

Cuando tuvo 70 años, en el 399 a.C., SÓCRATES fue sometido a juicio, en su ciudad, Atenas, bajo la acusación de no creer en la religión del Estado y de corromper a la juventud enseñándole a no reconocer los dioses de la República. Encontrado culpable por sus jueces, se le condenó a muerte por envenenamiento con un alcaloide vegetal llamado cicuta. SÓCRATES tomó la cicuta y pasó a la inmortalidad.

La figura de SÓCRATES ha sido destacada en múltiples oportunidades como una de las más altas cimas morales de la humanidad. El escritor moderno EDOUARD SCHURÉ, por ejemplo, dice:

> *Sus argumentos adquirían una gran fuerza en su boca, porque él en todo daba ejemplo: ciudadano irreprochable, intrépido soldado, juez íntegro, amigo fiel y desinteresado, dueño absoluto de todas sus pasiones* ([23], pág.128).

En la misma antigüedad, el historiador griego JENOFONTE afirmó en su *Apología* que el Oráculo de Delfos había declarado en una ocasión, por boca de la Pitonisa, que ninguno de los hombres era ni más libre, ni más justo ni más prudente que SÓCRATES. ([14], pág. 167)

El propósito de SÓCRATES, tal como se perfila en los *Diálogos* de PLATÓN, es que su interlocutor descubra la verdad sobre el concepto que se está debatiendo, sea éste la inmortalidad del alma o la belleza o la virtud, pero no como un resultado de la enseñanza de SÓCRATES sino por propia reflexión. El interlocutor debe llegar a decir, por ejemplo, qué es la justicia, dar razón de ella, encontrar el fundamento que explique por qué es como es y no de otro modo, hallar su definición universal. La fórmula racional mediante la cual se explica la justicia, es denominada por los griegos el logos de la justicia, que es lo que hoy llamaríamos el concepto de justicia. GARCÍA MORENTE lo resumió de la manera siguiente:

> *Lo que la geometría dice de una figura, del círculo, por ejemplo, para definirlo, es el* **logos** *del círculo, es la razón dada del círculo. Del mismo modo, lo que* SÓCRATES *pide*

> *afanoso a los ciudadanos de Atenas es que le den el* **logos** *de la justicia, el logos de la valentía. Dar y pedir* **logos** *es la operación que* SÓCRATES *practica a diario por las calles de Atenas* ([10], pág. 75),

El método empleado por SÓCRATES consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, SÓCRATES toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, SÓCRATES se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a des-cubrir, a des-velar, la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. Es esencial al método el empleo sistemático de la ironía socrática, que consiste en simular ignorancia sobre la materia de que se trata, con el fin de hacer aparecer la verdad a través del diálogo entre el maestro y el aprendiz.

En el fondo del método está la doctrina socrática de la reminiscencia. De acuerdo con esta concepción, típicamente racionalista, las Ideas o Formas, que son objetos inaccesibles a la percepción sensorial y aprehensibles sólo mediante el pensamiento, están en el alma de cada hombre, en estado latente, como adormecidas. El papel del maestro consiste en estimular este proceso de reflexión e introspección en el aprendiz, gracias al cual llega a conocer. El acto de conocer se produce cuando las Ideas se despiertan en el alma, reavivadas al contacto con el mundo sensible y mediante el recurso del diálogo. Un poco como en la rima quinta de BÉCQUER, que dice:

Del salón en el ángulo oscuro,
de su dueño tal vez olvidada,
silenciosa y cubierta de polvo,
veíase el arpa.

¡Cuánta nota dormía en sus cuerdas,
como el pájaro duerme en las ramas,
esperando la mano de nieve
que sabe arrancarlas!

-¡Ay! -pensé-. ¡Cuántas veces el genio
así duerme en el fondo del alma,
y una voz, como Lázaro, espera
que diga: ¡Levántate y anda!.

El camino hacia el conocimiento es un proceso gradual, en el cual la opinión y la creencia constituyen etapas intermedias. El aprendiz se esfuerza y participa activamente en el proceso, que termina cuando aquel inventa o descubre la respuesta adecuada a una pregunta bien formulada.

Dice ARISTÓTELES en la *Metafísica* (Met. M., 1078 b27) que a SÓCRATES se le atribuyen dos cosas importantes, a saber, las definiciones universales y los argumentos inductivos. Las definiciones universales dadas por SÓCRATES buscaban el significado de las Ideas, empleando para ello las argumentos inductivos, en los cuales tomaba como punto de partida ejemplos sencillos e ilustraciones concretas. Por ejemplo, la reflexión acerca de algunos casos particulares de actos justos, conducida por el maestro, debe llevar al aprendiz a una definición universal de justicia.

La inducción en SÓCRATES no es un método de demostración o prueba, sino un procedimiento encaminado a sugerir el significado de una definición universal, que se presenta a la mente con fuerza y claridad. La definición, por su parte, se justifica en la medida en que las consecuencias derivadas de su adopción sean satisfactorias.

Entre los investigadores de la Educación Matemática que se han ocupado de la pertinencia del método socrático en la enseñanza de distintos conceptos de las matemáticas, se destaca PIERRE VAN HIELE. De acuerdo con este autor ([24], pág.190), es posible emplear el método socrático, con muy buenos resultados, pero también es muy fácil fracasar en el intento . El estudio cuidadoso de la lección de geometría que aparece en el *Menón* [21] permite identificar la solución de problemas como la situación típica en que el método socrático puede ser útil. Dicha situación se caracteriza por los elementos siguientes: el maestro abre la discusión con un problema que les interese a los estudiantes, y éstos solo pueden alcanzar la solución mediante el estudio de una cierta materia. El propósito

del ejercicio es que los alumnos aprendan la materia hasta llegar a familiarizarse con los significados de sus conceptos fundamentales. VAN HIELE insiste en el cuidado que debe tenerse con las premisas siguientes: i) El maestro tiene que asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo. ii) El método socrático solo es efectivo en la medida en que se pueda garantizar que cada uno de los alumnos alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente. iii) El trabajo de los alumnos debe ser individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se les permita avanzar también a los alumnos que se muevan a paso lento. iv) El maestro debe calibrar acertadamente la dificultad del problema, de modo que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto.

2. La concepción constructivista del aprendizaje

En vista de que VAN HIELE se enmarca en la concepción constructivista del aprendizaje, conviene examinar la relación de dicha concepción con las dos grandes corrientes acerca de la naturaleza del conocimiento humano, a saber, el racionalismo y el empirismo.

La corriente racionalista cuenta entre sus adalides a PLATÓN, quien había tomado de SÓCRATES la doctrina de las ideas innatas y sostenía que del ejercicio de la razón era posible deducir conocimientos verdaderos acerca de la realidad. Opuesta a la concepción racionalista del conocimiento se levantó en Grecia la corriente empirista, preconizada por ARISTÓTELES, que negaba el innatismo de los conceptos y afirmaba que el conocimiento procede de los sentidos. De acuerdo con los empiristas, las imágenes generadas por las sensaciones se inscriben en la mente como una tabula rasa y se asocian entre sí con sujeción a algunas leyes, como las de semejanza, contigüidad y causalidad.

La lucha dialéctica entre las corrientes racionalista y empirista dominó el escenario de la filosofía occidental durante más de dos mil años, hasta el siglo XVIII. En términos generales, podría afirmarse que tanto

Descartes como Leibniz se alinean en el bando racionalista, aunque con matices que los diferencian en temas fundamentales, en tanto que Hobbes, Locke y Hume lo hacen en el empirismo. Kant abre el camino para la síntesis creadora con su doctrina de los conceptos a priori, los cuales constituyen categorías, como la de causalidad, impuestas por la mente sobre la realidad. Todo nuestro conocimiento empieza con la experiencia, dice Kant, pero de aquí no se puede concluir que todo él se origine en la experiencia. Kant escribió:

> *No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia. Pues ¿por dónde iba a despertarse la facultad de conocer, para su ejercicio, como no fuera por medio de objetos que hieren nuestros sentidos y ora provocan por sí mismos representaciones, ora ponen en movimiento nuestra capacidad intelectual para compararlos, enlazarlos, o separarlos y elaborar así, con la materia bruta de las impresiones sensibles, un conocimiento de los objetos llamado experiencia? Según el tiempo, pues, ningún conocimiento precede en nosotros a la experiencia y todo conocimiento comienza con ella.*
>
> *Más si bien todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia, no por eso origínase todo él en la experiencia. Pues bien podría ser que nuestro conocimiento de experiencia fuera compuesto de lo que recibimos por medio de impresiones y de lo que nuestra propia facultad de conocer (con ocasión tan solo de las impresiones sensibles) proporciona por sí misma, sin que distingamos este añadido de aquella materia fundamental hasta que un largo ejercicio nos ha hecho atentos a ello y hábiles en separar ambas cosas.* ([15], pág.27).

De acuerdo con la concepción kantiana, la materia de las impresiones sensoriales proviene de la experiencia, pero es el aparato mental humano el que ordena dichas impresiones en el espacio y en el tiempo y el que proporciona los conceptos o categorías del entendimiento, por medio de las cuales se comprende la experiencia. No podemos conocer las cosas en sí mismas, sino tan sólo en cuanto ellas aparecen como fenómenos

espaciales y temporales, necesariamente adaptados de antemano a las categorías.

Ernest von Glasersfeld ha señalado en un texto reciente hasta qué punto las concepciones kantianas sobre el conocimiento hacen ilusoria la búsqueda de la verdad, cuando ésta es entendida como concordancia con las cosas en sí. Escribió von Glasersfeld:

> *Si se acepta esta idea, se produce un desplazamiento radical del concepto del saber, no solo en el sentido del saber general y práctico, sino también en todo lo que consideramos científico y por lo tanto particularmente confiable. Si el tiempo y el espacio son coordenadas o principios de orden de nuestra experiencia, entonces no podemos representarnos cosas más allá del mundo de la experiencia, pues la forma, la estructura, el desarrollo de los procesos y el ordenamiento de cualquier tipo son, sin ese sistema de coordenadas, impensables en el verdadero sentido del término. Por lo tanto, es imposible que lo que llamamos saber pueda ser una imagen o una representación de una realidad no tocada por la experiencia. La búsqueda de un saber que, en el sentido corriente, sólo puede ser verdadero si coincide verdaderamente con objetos existentes en sí es en consecuencia ilusoria.* ([25], pág.25).

Los orígenes filosóficos del constructivismo se remontan a la teoría kantiana del conocimiento. Jean Piaget, a quien se considera como uno de los más caracterizados exponentes del constructivismo, si no su creador indiscutible, se identificó como "profundamente kantiano, pero de un kantianismo que no es estático" ([20] pág. 194), por cuanto sostenía que las categorías no están totalmente elaboradas desde un principio sino que ellas también se construyen.

En su intervención ante el *Segundo Congreso Internacional de Educación Matemática*, en 1973, Piaget se refirió a las posiciones constructivistas, en un tono marcadamente influido por el método socrático. Dijo Piaget en esa oportunidad:

> *Conviene, si queremos llevar a cabo esta aproximación necesaria entre las estructuras lógico-matemáticas del maestro y las del alumno en los distintos niveles del desarrollo, recordar algunos principios psicopedagógicos muy generales. El primero es el de que la comprensión real de una noción o una teoría supone su reinvención por el sujeto. Es evidente que en muchos casos éste puede dar la impresión de haber comprendido sin cumplir esta condición de reinvención, basta para ello cierta capacidad de reproducción y de aplicación en algunas situaciones prefabricadas. Pero la verdadera comprensión, aquella que se manifiesta por medio de nuevas aplicaciones espontáneas, o, dicho de otro modo, por una generalización activa, supone mucho más: que el sujeto haya sido capaz de encontrar por sí mismo las razones de la verdad que intenta comprender, y, por tanto, que la haya reinventado él mismo, al menos parcialmente. Como es natural, esto no quiere decir que el maestro ya no sea necesario: su papel no debe consistir en dar "lecciones", sino en organizar situaciones que inciten a investigar utilizando los dispositivos apropiados.* ([19], pág. 225).

La corriente constructivista se enfrascó, a lo largo del siglo XX, en diversas polémicas y debates no solo en oposición al empirismo sino, también, al innatismo racionalista. El *Centre Royaumont pour une science de l'homme*, por ejemplo, reunió en 1975 a un grupo de investigadores de distintas disciplinas en torno a las concepciones opuestas de Piaget, por un lado, y Noam Chomsky y Jerry Fodor, por el otro. En el curso del debate, Fodor sostuvo la posición innatista en los siguientes términos:

> *Resumiendo, ninguna de las teorías del aprendizaje desarrolladas hasta el momento es capaz de explicar, que yo sepa, cómo se adquieren los conceptos. Dichas teorías aclaran más bien cómo se fijan las creencias a través de las experiencias; son esencialmente lógicas inductivas. Este*

> *tipo de mecanismo, que muestra cómo se fijan las creencias a través de las experiencias, sólo tiene sentido sobre un fondo de nativismo racional.* ([20], pág. 188).

PIAGET replicó a los planteamientos de FODOR en los siguientes términos:

> *Ahora bien, si aplicamos la teoría de* FODOR *a la historia de las matemáticas, equivale a decir que no se ha inventado nunca nada, que todo está contenido siempre en el estadio precedente y que, por consiguiente, las matemáticas en su totalidad están predeterminadas y son innatas. No obstante, este innatismo de las matemáticas me plantea un terrible problema: ¿a qué edad encontraremos esta manifestación del innatismo de los números negativos, de los números complejos, etc.: a los dos años, a los siete, a los veinte? Y sobre todo, ¿por qué diablos tendría que ser de la especie humana, si ya hay aquí estructuras innatas necesarias? Por mi parte, me resulta difícil creer que las teorías se encuentran ya preformadas en las bacterias o en los virus; alguna cosa ha debido de construirse* ... ([20], pág. 194)

La contribución fundamental de PIAGET a la psicología experimental radicó en su punto de vista genético, que lo llevó a estudiar el desarrollo de las funciones cognitivas, es decir, aquellas que proporcionan un conocimiento del mundo externo. PIAGET concibió el desarrollo cognitivo del individuo como un avance gradual hacia el logro de una adaptación inteligente al entorno, que se manifiesta por un equilibrio más completo entre los distintos procesos psicológicos. La confrontación del conocimiento nuevo con el antiguo abre paso a un período de transición, en el cual el individuo reconstruye su estructura de conocimiento y llega finalmente a un estado de equilibrio más maduro.

Dos de las nociones más fértiles introducidas por PIAGET son la asimilación y el acomodamiento, íntimamente asociadas con los conflictos cognitivos que se presentan en los períodos de transición entre una fase dada y la siguiente. Durante la transición pueden entrar en conflicto los

elementos de un conocimiento nuevo con la experiencia de las ideas previamente adquiridas. El término asimilación denomina el proceso por el cual el individuo toma nuevos datos y los incorpora a las estructuras de conocimiento ya existentes. Algunos tratadistas recientes ([22], pág. 62) han notado que el concepto piagetiano de asimilación da cuenta de una construcción estática del conocimiento, al alcance de todos los organismos e inclusive de los programas informáticos que estén dotados de un sistema de memoria. La palabra acomodamiento, en cambio, se refiere a una construcción dinámica del conocimiento y describe el proceso por el cual la estructura cognitiva del individuo entra en crisis y se ve forzada a una modificación. El acomodamiento, complementario de la asimilación, lleva consigo una reestructuración de los conocimientos anteriores, más que la sustitución de unos conocimientos por otros, y conduce, con frecuencia, a una auténtica reconstrucción mental.

3. El modelo de van Hiele

Entre los continuadores de Piaget, se cuentan los esposos Pierre y Dina van Hiele, quienes introdujeron en Holanda, a partir de 1957, el modelo de los niveles de pensamiento con el propósito de desarrollar en los alumnos de la escuela elemental el *insigtht* en la geometría. El modelo despertó de inmediato el interés de los psicólogos en la Unión Soviética, hasta el punto que A. M. Pyshkalo, en 1963, lo tomó como base para su programa de enseñanza de la geometría. En los Estados Unidos, Izaak Wirszup introdujo formalmente las ideas de los van Hiele mediante la conferencia titulada *Some Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry*, ante el encuentro anual del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), de Atlantic City, realizado en 1974. Algunas publicaciones, como las de Hans Freudenthal [9], Alan Hoffer [11] y A. Coxford [3], ayudaron a despejar el camino.

Hoffer presentó los niveles de pensamiento de van Hiele en los siguientes términos:

> *Los niveles de pensamiento que van unidos al aprendizaje de una materia particular son de naturaleza inductiva. En el nivel n-1 lo estudiado son ciertas versiones limitadas de los objetos. Algunas de las relaciones entre los objetos están establecidas de manera explícita; sin embargo, existen otras relaciones que no están explícitamente establecidas, aunque posiblemente son de difícil acceso.*
>
> *En el nivel n los objetos estudiados son ahora los enunciados que fueron formulados explícitamente en el nivel $n-1$, además de aquellos enunciados explícitos que solamente estaban implícitos en el nivel $n-1$. En efecto, los objetos que hay en el nivel n consisten en extensiones de los objetos que había en el nivel $n-1$.*
>
> *Uno de los objetivos principales que se persiguen con la diferenciación en niveles es el de poder reconocer los obstáculos que se les presentan a los estudiantes. Si un estudiante que está pensando en el nivel $n-1$ es enfrentado a un problema que requiere vocabulario, conceptos o pensamiento del nivel n, el estudiante es incapaz de progresar en el problema, con consecuencias esperables como la frustración, la ansiedad y aún la ira.* ([12], pág. 206).

Aunque VAN HIELE recibió una fuerte influencia de PIAGET, se separó de éste en puntos cruciales, como los siguientes:

i) La teoría psicológica de PIAGET se refiere primordialmente al desarrollo del niño, más que al aprendizaje. En el modelo de VAN HIELE, en cambio, es esencial el asunto de cómo estimular a los niños para que asciendan de un nivel al siguiente. La teoría de las fases de aprendizaje de VAN HIELE responde a esta necesidad.

ii) PIAGET no captó en toda su dimensión el papel que juega el lenguaje en el paso de un nivel a otro por parte del aprendiz. En el modelo de VAN HIELE, en cambio, el aprendiz desarrolla un lenguaje específico para cada nivel de pensamiento.

iii) VAN HIELE concibe las estructuras de un nivel superior como el resultado del estudio de un nivel inferior: Sólo se alcanza el nivel

superior si las reglas que gobiernan el nivel inferior han sido hechas explícitas y estudiadas, convirtiéndose así ellas mismas en una nueva estructura. En la teoría de PIAGET, en cambio, los niños nacen dotados de la estructura superior y sólo necesitan tomar conciencia de ella. ([24], pág. 6).

iv) Para PIAGET el desarrollo del espíritu humano conduce inevitablemente a ciertos conceptos teóricos. VAN HIELE, en cambio, pone el énfasis en que dichos conceptos son construcciones humanas resultantes de procesos de aprendizaje en los cuales interviene el periodo histórico. ([24], pág. 5).

Siguiendo a HOFFER [12], quien se inspira para ello en la interpretación de los niveles de pensamiento como categorías, se pueden identificar los objetos para cada uno de los niveles en la siguiente forma:

Nivel 0: Los objetos son los elementos básicos del estudio.
Nivel 1: Los objetos son propiedades que analizan los elementos básicos.
Nivel 2: Los objetos son enunciados que relacionan las propiedades.
Nivel 3: Los objetos son ordenaciones parciales (ó sucesiones) de los enunciados.
Nivel 4: Los objetos son propiedades que analizan las ordenaciones parciales.

La aplicación del modelo a una materia particular necesita el establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados, que permitan la detección de los mismos a partir de la actividad de los aprendices. Para que puedan ser considerados dentro del modelo de VAN HIELE, los niveles diseñados deben ser jerárquicos, recursivos, secuenciales y formulados de manera tal que permitan detectar un progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual; los test -de cualquier tipo- que se diseñen para la detección de los niveles, deben recoger la relación existente entre un nivel dado y el lenguaje empleado por los aprendices situados en ese nivel; el diseño de los test debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundir a éstos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

Véase enseguida la versión, simplificada por HOFFER [12], de los niveles de pensamiento, tal como fueron aplicados por VAN HIELE a la geometría:

Nivel 0: Los alumnos reconocen las figuras por su apariencia global. Pueden aprender el empleo de cierto vocabulario para identificar algunas figuras (por ejemplo, las palabras "triángulo", "cuadrado", "cubo"). Pero no son capaces de identificar explícitamente las propiedades de las figuras.

Nivel 1: Los alumnos analizan las propiedades de las figuras (por ejemplo, con enunciados como "los rectángulos tienen diagonales iguales", "un rombo tiene todos los lados iguales"). Pero no son capaces de interrelacionar explícitamente las figuras con sus propiedades.

Nivel 2: Los alumnos relacionan las figuras con sus propiedades (por ejemplo, con enunciados como "todo cuadrado es un rectángulo"). Pero no son capaces de organizar los enunciados en forma secuencial, para justificar sus observaciones.

Nivel 3: Los alumnos organizan sucesiones de enunciados que les permiten deducir un enunciado a partir de otro (por ejemplo, para mostrar que el postulado de las paralelas implica que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°). Pero no reconocen la necesidad del rigor y no alcanzan a comprender las relaciones entre varios sistemas deductivos.

Nivel 4: Los alumnos analizan diversos sistemas deductivos con un grado de rigor comparable al exigido por D. HILBERT en sus tratamiento de la geometría. Los alumnos comprenden las propiedades de que puede gozar un sistema deductivo, como la consistencia, la independencia y la completitud de los postulados.

4. Las fases del aprendizaje

Con el fin de ayudar al alumno a pasar de un nivel de pensamiento dado al nivel inmediatamente superior, los VAN HIELE propusieron una especie de receta que se debe seguir al impartir la instrucción correspondiente. Dicha receta se compone de cinco fases de aprendizaje, al final

de las cuales el alumno habrá alcanzado el nuevo nivel de pensamiento. La necesidad del aprendizaje para poder progresar en los niveles de pensamiento fue establecida por P. van Hiele en la forma siguiente:

> *La transición de un nivel de pensamiento al siguiente no es un proceso natural, sino que tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje* ([24], pág. 50).

van Hiele afirma con firmeza que la obtención de cada nivel es el resultado de un proceso de aprendizaje, aunque éste, en algunas ocasiones, pueda ser incidental y no guiado, e insiste en que sería un error deplorable el suponer que se pueda lograr un nivel por mera maduración biológica, ([24], pág. 65)

Ya desde la primera presentación de su teoría, en 1955, formulada en el marco del concepto piagetiano de operación, señalaba van Hiele el papel que pueden jugar las situaciones didácticas creadas por el maestro, cuándo éste asume su condición de guía y acelerador del proceso de aprendizaje mediante el cual el aprendiz progresa en la secuencia de los niveles. En efecto, van Hiele escribió en esa oportunidad lo siguiente:

> *Puede afirmarse que alguien ha alcanzado un nivel más alto de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento lo capacita, con respecto a ciertas operaciones, para aplicar estas operaciones sobre nuevos objetos. La obtención de un nuevo nivel no puede ser efectuada por la enseñanza, pero, sin embargo, el profesor puede crear una situación favorable para que el alumno alcance el nivel superior de pensamiento, mediante una adecuada escogencia de ejercicios* ([24], pág. 39).

Las cinco fases de aprendizaje son las siguientes:

Fase 1 . Indagación: El maestro sostiene un diálogo con los alumnos acerca de los objetos de la materia que se va a estudiar, lo que le permite conocer las interpretaciones que los alumnos les dan a

las palabras. En esta fase se prepara el terreno conceptual para el estudio posterior.

Fase 2 . Orientación dirigida: El profesor organiza en forma secuencial las actividades de exploración de los alumnos, por medio de las cuales éstos pueden tomar conciencia de los objetivos que se persiguen y se familiarizan con las estructuras características. La mayoría de las actividades en esta fase consisten en tareas de un solo paso en las que se les pide a los alumnos dar respuestas específicas.

Fase 3 . Explicitación: Los estudiantes refinan el empleo de su vocabulario, construyendo ahora sobre experiencias previas. La intervención del maestro en esta fase debe restringirse a lo mínimo indispensable y orientarse a facilitar la expresión explícita de las opiniones de los alumnos con respecto a las estructuras intrínsecas del estudio. En esta fase, los alumnos empiezan a formar el sistema de relaciones del estudio, a partir del cual podrán operar con eficacia en la solución de los problemas. Es en esta fase cuando el diálogo socrático puede resultar particularmente fértil.

Fase 4 . Orientación libre: Los alumnos encuentran en esta fase tareas de múltiples pasos, así como otras que pueden llevarse a cabo por procedimientos diferentes. Esto les permite adquirir experiencia en el hallazgo de su manera propia de resolver las tareas. Los alumnos llegan a hacer explícitas muchas de las relaciones entre los objetos de estudio cuando se les estimula a orientarse por sí mismos en el campo de investigación.

Fase 5 . Integración: Los alumnos revisan en esta fase los métodos que tienen a su disposición y lanzan una mirada de conjunto, con lo cual se busca que unifiquen los objetos y las relaciones y que los asimilen internamente en un nuevo dominio de pensamiento. La ayuda del maestro en esta fase consiste en proporcionar a los alumnos algunas vistas panorámicas de aquello que ellos ya conocen, teniendo cuidado de no presentarles ideas nuevas o discordantes.

La tercera fase de aprendizaje - la de explicitación - no debe confundirse con las explicaciones dadas por el maestro, pues lo esencial en esta fase son las observaciones que los estudiantes formulan explícitamente más que las lecciones que reciben. VAN HIELE anota que, en un proceso de

aprendizaje guiado, la ayuda del maestro es principalmente indirecta y proviene de la situación didáctica creada por él, con la cual logra acelerar el desarrollo. ([24], pág. 177).

Acerca del papel del maestro, VAN HIELE escribió:

> *El mejoramiento de la educación queda bloqueado por el adoctrinamiento (el profesor es el conocedor universal y el estudiante está ahí para recibir instrucción). La tarea del profesor no debe ser la de impartir conocimientos. Por el contrario, cada vez que el profesor tenga que intervenir para hacer claras las ideas, él (o ella) debe ser consciente de la necesidad de defender esas ideas una y otra vez. El profesor debe tratar a sus estudiantes como opositores dignos, opositores capaces de introducir nuevos argumentos en la discusión.* ([24], pág. 56)

Algunas de las fases pueden diferenciarse por el tipo de problemas que deben plantearse en ellas. En la fase 1 se pretende que los problemas le ayuden al aprendiz a descubrir el campo del conocimiento y, aunque deben ser sencillos, no se espera que los alumnos, por sí solos, estén en capacidad de resolverlos. En la fase 2 se delimitan los principales elementos (conceptos, definiciones, propiedades) que forman el sistema de relaciones con las que los alumnos deberán razonar. Es necesario que las fases 2, 3 y 4 se realicen en el orden establecido, para conseguir un buen aprendizaje y un adecuado desarrollo de la capacidad de razonamiento. En la fase 4 los problemas deben ayudarle al aprendiz a encontrar su propio camino en el sistema de relaciones y, por tanto, conviene que tengan varias soluciones posibles. ([24], pág. 200)

5. Extensiones del modelo fuera del ámbito de la geometría

Entre las primeras investigaciones acerca del modelo de VAN HIELE que escaparon al ámbito de la geometría se encuentra la tesis doctoral

de Judy Land [16], la cual empleaba el modelo para describir procesos cognitivos que se daban en la mente de estudiantes universitarios del college americano, y se ocupaba de las funciones exponencial y logarítmica, en un contexto de manipulación algebraica. Planteaba con precisión sus objetivos: (i) Definir operacionalmente la conducta de los estudiantes en cada nivel usando el modelo de van Hiele. (ii) Determinar si las respuestas de los alumnos a una entrevista escrita pueden ser caracterizadas de acuerdo con los niveles de pensamiento. (iii) Formular descriptores de los niveles de pensamiento. (iv)Explorar el empleo de las fases de aprendizaje para facilitar el recorrido de los estudiantes desde un nivel dado al nivel inmediatamente superior.

Pueden señalarse dos defectos principales en el trabajo de Land: (i) se centró más en el estudio de habilidades y destrezas de tipo algebraico y manipulativo, que en el pensamiento y el razonamiento de los alumnos, y (ii) se apoyó en un número muy pequeño de entrevistas individuales. Sin embargo, dicha tesis abrió el camino para una serie de investigaciones orientadas a la extensión del modelo de van Hiele al ámbito del análisis matemático en la educación universitaria, llevadas a cabo en el departamento de matemática aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, España.

Los trabajos en dicha dirección se han mantenido en el contexto geométrico y visual en el que se desarrollaron las investigaciones iniciales de los van Hiele. En primer término, se estudió cómo razona el aprendiz con respecto al problema de la existencia de la recta tangente a una curva en un punto, tomando como nivel 0 las nociones intuitivas de punto, recta y curva. El instrumento de ataque fue la idea de *zoom* o escalamiento simultáneo en ambas variables, pues si una curva tiene tangente en un punto debe convertirse en una recta después de varios *zooms*. La investigación permitió caracterizar, mediante los descriptores de los niveles 1, 2 y 3, la aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local en su contexto de recta tangente [17].

En segundo término, se abordó el problema de la visualización de la noción de continuidad de una curva plana en un punto, tomando como instrumento de estudio el estiramiento horizontal, que consiste en escalar la abscisa, sin cambiar la ordenada, pues una curva es continua

en un punto, según la definición de Cauchy, si aparece plana después de varios estiramientos. Se logró caracterizar, mediante los descriptores de los niveles 1, 2 y 3, la extensión del modelo de van Hiele al concepto de continuidad local, visualizado a través de la imagen de controlabilidad de errores [2].

En las investigaciones mencionadas sobre la tangente y la continuidad se empleó, de manera esencial, la técnica de la entrevista clínica, pues es la más adecuada para explorar los procesos de pensamiento que se dan en la mente del aprendiz: Ella permite analizar el lenguaje empleado por los alumnos, el cual es la base para comprender el proceso de construcción y descubrir los niveles de pensamiento relativos al concepto estudiado en la investigación. Tanto en el caso de la tangente como de la continuidad se diseñaron guiones modelo de entrevistas semiestructuradas, que no son cerradas sino que permiten la intervención del entrevistador a tenor de las respuestas del entrevistado. Las entrevistas individuales debían también convertirse en experiencias de aprendizaje para los alumnos entrevistados, por lo cual se siguió en ellas el método socrático, tal como éste se expone en los *Diálogos* de Platón: el propósito que se persigue con la entrevista socrática es que el aprendiz reflexione no sólo acerca de las preguntas que se le formulan sino, también, acerca de sus propias respuestas y que llegue a hacer conciencia de las relaciones y propiedades que utiliza en sus razonamientos. El entrevistador debe poner especial cuidado en el vocabulario empleado por el aprendiz, quien, a lo largo de la entrevista, va elaborando su propio lenguaje con precisión cada vez mayor. Como resultado de la entrevista, el aprendiz hace manifiesto su nivel de pensamiento con respecto al concepto estudiado.

Con una metodología similar a la de los trabajos arriba mencionados se abordaron posteriormente los siguientes temas de investigación: (i) el análisis de la noción de suma de una serie, visualizando los términos de ésta como segmentos de un zig–zag infinito y su suma como la longitud de dicho zig–zag [13]; (ii) la recta tangente entendida como la posición límite de un haz de secantes, que es la forma tradicional de enseñanza del concepto de tangente, y el estudio comparativo de esta metodología con la alternativa, por vía de *zoom* [8]; (iii) la convergencia de una sucesión numérica, en un contexto estrictamente visual que propicie la formación

en el aprendiz de un concepto imagen adecuado, sin exigirle destrezas específicas de tipo operacional o de manipulación de símbolos lógicos [18]. También en estas investigaciones se empleó de manera intensa el asistente matemático en los instrumentos de estudio diseñados.

Sin embargo, el modelo de VAN HIELE postula exclusivamente la existencia de niveles de pensamiento y no tiene que supeditarse al apoyo visual en el ordenador. DE LA TORRE llevó a cabo una investigación, en el marco de la teoría de los niveles de pensamiento de VAN HIELE, sobre el continuo como modelo matemático del espacio y del tiempo y sobre los obstáculos que debe enfrentar el aprendiz en la construcción de tal modelo, en un contexto de puro razonamiento que no contó con ningún apoyo visual en el ordenador [4].

El objeto de la investigación llevada a cabo por DE LA TORRE en su tesis doctoral [5] fue validar una propuesta metodológica, alternativa a la tradicional, orientada a acercar a los estudiantes de primer año de universidad a la modelización matemática del espacio recorrido por un móvil y a la del tiempo empleado en el movimiento. En ambos casos, el modelo, es decir, la estructura teórica construida en el proceso, es el sistema de los números reales que se conoce como continuo aritmético, caracterizado en el análisis matemático como un campo ordenado completo arquimediano. Este es equivalente al continuo geométrico lineal, visualizado habitualmente como una recta indefinida.

Dicha modelización abrió paso a la solución de múltiples problemas físicos, relativos a los cuerpos materiales, como, por ejemplo, las cuerdas vibrantes y los sólidos rígidos, pero llevaba consigo un cúmulo de obstáculos. ZENÓN DE ELEA, en el siglo IV a.C., señaló con claridad las principales dificultades del modelo y las enunció bajo la forma de paradojas. La teoría de conjuntos, cuyo desarrollo se vio estimulado en el último tercio del siglo XIX por los aportes de GEORGE CANTOR, constituye el marco en el cual se resuelven satisfactoriamente dichas paradojas.

El asunto central bajo estudio, por parte de DE LA TORRE, fue el razonamiento seguido por el aprendiz en la construcción del concepto de continuo como modelo matemático del espacio y del tiempo. Desde las primeras etapas de la investigación surgieron, con fuerza manifiesta, dos

temas preponderantes: por un lado, el concepto cantoriano de equipotencia de agregados infinitos de puntos y, por otro, la explicación de las paradojas de Zenón -la de Aquiles y la tortuga y la de la flecha- a la luz del modelo.

El principal instrumento de la investigación fue la entrevista socrática, la cual fue dividida en dos fases bien diferenciadas: la primera, mediante un lenguaje estrictamente geométrico, permitió analizar la asimilación del concepto matemático de continuo por parte del aprendiz. En esta fase, el entrevistador conduce gradualmente al aprendiz hasta el momento en que éste mismo formula la definición cartesiana de equipotencia de dos figuras geométricas. Se completó el estudio clínico de casos individuales, llevado a cabo en la primera fase, con una prueba escrita que reprodujo el guión de la entrevista, sustituyendo las acciones socráticas de ésta por aportes de información y reflexión intercalados en el test.

La segunda fase de la entrevista se ocupó de los procesos de modelización involucrados, a saber, la del espacio y del tiempo como un continuo y la del fenómeno del movimiento como una función. En esta fase, el objetivo del entrevistador es el de encontrar, mediante un lenguaje más coloquial que geométrico, el camino seguido por el aprendiz en la formulación del modelo matemático y la explicación posterior que éste permite darles a los hechos del mundo físico. En cada una de las investigaciones llevadas a cabo en la Universidad Politécnica de Valencia, que sirvieron de fundamento a seis tesis doctorales, se obtuvieron los descriptores para los niveles 1, 2 y 3, relativos al concepto específico en consideración. Se diseñaron, además, los modelos de guión para los entrevistas clínicas, semiestructuradas y socráticas por medio de los cuales se hallaron los descriptores de los niveles y se clasificó a los estudiantes en sus respectivos niveles. Se comprobó, en fin, mediante sendos cuestionarios escritos de respuesta múltiple, que se aplicaron sobre muestras amplias de estudiantes, que los niveles 1, 2 y 3 pueden ser efectivamente detectados en las muestras; el oportuno tratamiento estadístico permitió asignarle automáticamente a cada alumno su correspondiente nivel.

6. Conclusión

El conocimiento de los niveles de pensamiento puede ser de gran utilidad desde el punto de vista didáctico para el mejoramiento de las actividades del docente, al evitar que éste caiga en el error frecuente de atosigar a los aprendices con conceptos tomados de niveles que aquellos no han alcanzado. Acerca de las posibles ventajas que el maestro puede derivar del conocimiento de los niveles, VAN HIELE escribió:

> *Por supuesto, hay muchas ventajas en el uso de los niveles de pensamiento cuando se enseña alguna materia, porque con la ayuda de dicha teoría el profesor puede encontrar el punto a partir del cual debe iniciar la enseñanza. Pero la teoría de los niveles es importante también desde el punto de vista del conocimiento de la materia por parte del profesor éste sabe que existe una base bien fundamentada con la cual empezar, esto es, el nivel básico visual; sabe que las dificultades se presentan a partir del segundo nivel, por que la descripción depende del contexto escogido; y es consciente de la inestabilidad de los niveles subsiguientes, porque el camino que él mismo siguió para alcanzarlos fue el de tratar de comprender la estructura de los niveles precedentes en la forma en que sus propios profesores quisieron que lo hiciera. Cuando hubo dificultades, ¿tuvo el profesor, en su educación, la oportunidad de llenar los vacíos?. ¿Cuántas veces estamos inseguros de nuestra enseñanza como profesores, cuántas veces nos vemos en la necesidad de explicar cosas que nosotros mismos nunca comprendimos claramente? La teoría de los niveles puede ayudarnos en este aspecto: sabemos que la confiabilidad de los niveles a partir del tercero no es segura; ya no es necesario ocultarles nuestras incertidumbres a los alumnos. Al contrario, tomemos la incertidumbre como el punto de partida y quizás una buena discusión con la clase nos llevará a encontrar soluciones mejores.* ([24], pág. 56)

Los trabajos de VAN HIELE autorizan la conclusión de que una cosa es la matemática considerada como un sistema formal y otra es esa misma ciencia cuando se la toma como una actividad mental realizada por seres humanos. La presentación lógica, impecablemente formal, de una teoría matemática puede no estar en correspondencia con el desarrollo cognitivo del aprendiz y ser insuficiente, en consecuencia, para garantizar que los estudiantes la comprendan.

Referencias

[1] CAMPILLO HERRERO, P. *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 1999.

[2] CAMPILLO H., P., PÉREZ CARRERAS, P. *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele*, Divulgaciones Matemáticas, **6**, No 1 (1998), 69–80.

[3] COXFORD, A. *Research directions in geometry*, en: R. LESH & D. MIZKIEWCZ (eds.), *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts*, Columbus, Ohio, ERIC/SMEAC, 1978.

[4] DE LA TORRE, ANDRÉS. *La modelización del espacio y del tiempo*, Editorial Universidad de Antioquia, Medellín, 2003.

[5] DE LA TORRE, ANDRÉS. *La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.

[6] DE LA TORRE, ANDRÉS. *Una aplicación del modelo de van Hiele al concepto de continuo*, Matemáticas Enseñanza Universitaria, **8**, No 1,2 (2000), 115–139.

[7] DE LA TORRE, ANDRÉS. *La modelización del espacio y del tiempo*, Divulgaciones Matemáticas, **8**, No 1 (2000), 57–68.

[8] ESTEBAN, PEDRO V. *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia , 2000.

[9] FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

[10] GARCÍA MORENTE, M. *Lecciones preliminares de filosofía*, Porrúa, México, 1994.

[11] HOFFER, A. *Geometry, A Model of the Universe*, Addison–Wesley, Menlo Park, 1979.

[12] HOFFER, A. *van Hiele–based research*, en: R.LESH & M. LANDAU (eds.), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, Nueva York, Academic Press, 1973.

[13] JARAMILLO, CARLOS M. *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia , 2000.

[14] Jenofonte. *Recuerdos de Sócrates. Apología o defensa ante el Senado*. Salvat, Alianza Editorial, España, 1971.
[15] Kant, I. *Crítica de la razón pura*, Porrúa, México, 2000.
[16] Land, J. *Appropriateness of the van Hiele model for describing students' cognitive processes on algebra tasks as typified by college students' learning of functions*, Tesis doctoral, University of Boston, 1991.
[17] Llorens, J.L., Pérez Carreras, P. *An Extension of van Hiele´s Model to the Study of Local Approximattion*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., **28**, No 5 (1997), 713–726.
[18] Navarro, María. *Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2002.
[19] Piaget, J., Choquet, G., Dieudonné, J., Thom, R. y otros. *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 1978.
[20] Piatelli–Palmarini, M.(ed.). *Teorías del lenguaje, teorías del aprendizaje*, Crítica, Barcelona, 1983.
[21] Platón. *Diálogos*, Porrúa, México, 1996.
[22] Pozo Municio, I. *Aprendices y maestros, la nueva cultura del aprendizaje*, Alianza, Madrid, 2000.
[23] Schuré, E. *Los grandes iniciados*, América Ibérica, Madrid, 1995
[24] van Hiele, P. *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press, Orlando, Florida, 1986.
[25] von Glasersfeld, E. *Despedida de la objetividad*, en: Watzlawick, P. & Krieg, P. (eds.), *Contribuciones al constructivismo*, Gedisa, Barcelona, 1998.

(Recibido en octubre de 2003)

Andrés de la Torre
e-mail: adatorre@matematicas.udea.edu.co
Universidad de Antioquia
Medellin, Colombia